

أثبت أن الكمية التالية عدد صحيح

$$\frac{(4m)!(4n)!}{(m!)^2(n!)^2[(n+m)!]^2}$$

الحل إذا كان $n = m$ فإن المقدار يأخذ الصورة التالية

$$\begin{aligned} \frac{(4m)!(4n)!}{(m!)^2(n!)^2[(n+m)!]^2} &= \frac{(4m)!(4m)!}{(m!)^2(m!)^2[(2m)!]^2} = \frac{(4m)!}{(m!)^4} \cdot \frac{(4m)!}{(2m)!(2m)!} = \\ &= \binom{4m}{m \ m \ m \ m} \binom{4m}{2m} \end{aligned}$$

ومن المعروف أن من حساب التباديل والتوافيق أن الكمية الأخيرة عدد صحيحة.

أما إذا كان $m > n$ فيجب أن نرى الأمور التالية

$$1. \quad 2m - (m + n) = (m + n) - 2n = m - n > 0$$

أي أن $m + n$ يقع في منتصف الطريق بين $2m$ و $2n$

$$m > n \Rightarrow 2m > m + n \Rightarrow 2m - 1 > m + n - 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow 2m - (m - n - 1) > m + n - (m - n - 1)$$

ويمكن كتابة المتراجحة الأخيرة بالشكل التالي

$$2m - (m - n - 1) > m + n - (m - n - 1) \Rightarrow m + n + 1 > 2n + 1$$

وبحساب حاصل ضرب الأطراف اليمنى من كل متراجحة من سلسلة المتراجحات وكذلك حاصل ضرب الأطراف اليسرى، فسنحصل على الصيغة التالية

$$2m \cdot (2m - 1) \cdot (2m - 2) \dots (m + n + 1) > (m + n) \cdot (m + n - 1) \cdot (m + n - 2) \dots (2n + 1)$$

نضرب البسط والمقام في الطرف الأيسر في $(m + n)!$ ثم

نضرب البسط والمقام في الطرف الأيمن $(2n)!$ ونحصل على الصيغة التالية

$$\frac{(2m)!}{(m + n)!} > \frac{(m + n)!}{(2n)!}$$

ونحصل من هذه الأخيرة على النتيجة التالية

$$(2m)!(2n)! > [(m + n)!]^2$$

فإذا استطعنا أن نثبت أن $\frac{(4m)!(4n)!}{(m!)^2(n!)^2(2m)!(2n)!}$ عدد صحيح فإن العلاقة المعطاة أيضا تمثل عددا صحيحا و لكن هذه الأخيرة ما

هي إلا

$$\binom{4m}{m \ m \ 2m} \binom{4n}{n \ n \ 2n}$$

أي أنها تمثل عددا صحيحا موجبا